Эргодическая теорема для действий фуксовых групп

А. И. Буфетов, А. В. Клименко, К. Сириес

Основной результат этой заметки, теорема 1, устанавливает поточечную сходимость сферических средних для действий фуксовой группы. Пусть G – конечно порождённая фуксова группа, $\mathcal{R}$ – её фундаментальная область, возможно имеющая вершины или дуги на границе гиперболического диска $\mathbb{D}$, и пусть $\mathbf{T}_{\mathcal{R}}=\{g\mathcal{R}\colon g\in G\}$ – соответствующее замощение диска $\mathbb{D}$. Будем говорить, что $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию *ровных углов* (*even corners*), если геодезическая, проходящая через любую сторону области $\mathcal{R}$, содержится в объединении границ областей $g\mathcal{R}\in\mathbf{T}_{\mathcal{R}}$.

Пусть G_0 – симметричное множество образующих группы G, состоящее из элементов, переводящих $\mathcal{R}$ в смежные области разбиения $\mathbf{T}_{\mathcal{R}}$. Обозначим $|g|$ длину кратчайшего слова в G_0, представляющего $g\in G$, и пусть $S(n)=\{g\in G\colon |g|=n\}$ – сфера радиуса n в группе G.

Пусть группа G действует на вероятностном пространстве (X,μ) сохраняющими меру преобразованиями T_g. Определим сферические средние функции $f\in L^1(X,\mu)$:

$$\mathbf{S}_n(f)=\frac{1}{\#S(n)}\sum_{g\in S(n)} f\circ T_g.$$

Пусть $v\in\mathbb{D}$ – вершина $\mathbf{T}_{\mathcal{R}}$. Если $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию ровных углов, то граница $\mathbf{T}_{\mathcal{R}}$ в малой окрестности v состоит из $n=n(v)$ отрезков геодезических, пересекающихся в v и разбивающих эту окрестность на $2n(v)$ секторов. Обозначим $N(\mathcal{R})$ число сторон $\mathcal{R}$ внутри $\mathbb{D}$. Если G_0 содержит эллиптический элемент порядка 2, то его неподвижная точка считается вершиной $\mathcal{R}$. Введем следующее условие на $\mathcal{R}$.

Условие 1. Область $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию ровных углов. Кроме того, либо $N(\mathcal{R})\geqslant 5$, либо $\mathcal{R}$ некомпактна и $N(\mathcal{R})\in\{3,4\}$, либо $\mathcal{R}$ компактна, $N(\mathcal{R})=4$ и $\mathcal{R}$ не имеет пары противоположных вершин v, v', для которых $n(v)=n(v')=2$.

Обозначим $L\log L(X,\mu)=\biggl\{f\in L^1\colon \displaystyle\int|f|\log^+|f|\,d\mu<\infty\biggr\}$.

Теорема 1. *Пусть G – неэлементарная фуксова группа, $\mathcal{R}$ – её фундаментальная область, удовлетворяющая условию 1, а G_0 – вышеуказанное множество образующих G. Пусть G действует на вероятностном пространстве Лебега (X,μ) сохраняющими меру преобразованиями. Обозначим $\mathcal{I}_{G_0^2}$ σ-алгебру множеств, инвариантных под действием отображений вида $T_{g_1g_2}$, $g_1,g_2\in G_0$. Тогда для любой функции $f\in L\log L(X,\mu)$ имеет место следующая сходимость при $n\to\infty$:*

$$\mathbf{S}_{2n}(f)\to \mathsf{E}(f\mid \mathcal{I}_{G_0^2})\quad \textit{почти наверное и в } L^1,$$

где $\mathsf{E}(f\mid\mathcal{I}_{G_0^2})$ – условное математическое ожидание f относительно σ-алгебры $\mathcal{I}_{G_0^2}$.

Доказательство теоремы обобщает рассуждения из [3], где сходимость сферических средних установлена для действий свободной группы. Главный шаг в доказательстве теоремы 1 – это построение нового марковского кодирования для фуксовой группы, удовлетворяющей условию 1.

Первые результаты о поточечной сходимости сферических средних для гиперболических по Громову групп были получены К. Фудзиварой и А. Нево [5] при условии экспоненциального перемешивания действия. Удобный метод доказательства эргодических теорем для действий свободных групп, предложенный Р. И. Григорчуком [6],

Работа А. И. Буфетова поддержана грантом Европейского совета по исследованиям (проект № 647133 ICHAOS). Работа А. В. Клименко частично проддержана грантом РФФИ-CNRS № 18-51-15010 и грантом РФФИ № 18-31-20031.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10099

Ж.-П. Тувено (устное сообщение) и в [2], состоит в построении по действию группы некоторого марковского оператора P. Сходимость сферических средних тогда соответствует сходимости его степеней $P^n f$. Данное в [3] доказательство сходимости в случае свободной группы основано на аргументе "Alternierende Verfahren" Дж.-К. Роты [7], т. е. на сходимости $(P^*)^n P^n f$. Для получения отсюда сходимости $P^{2n} f$ нужно соотношение между P и P^* (см. [3; предложение 3]). Основой для него являются следующие условия симметричности для марковского кодирования на группе G, по которому и строится оператор P.

1. Пусть Ξ – множество состояний марковской цепи. Существует обращающая время инволюция $\iota\colon \Xi \to \Xi$, т. е. такая инволюция, что переход $k \to j$ допустим тогда и только тогда, когда допустим $\iota(j) \to \iota(k)$.
2. Существуют такие отображения $\gamma, \omega\colon \Xi \to G_0$, что
$$\omega(\iota(k)) = \omega(k)^{-1}; \qquad \gamma(k) = \omega(j)^{-1}\gamma(\iota(j))^{-1}\omega(k), \quad \text{если } k \to j \text{ допустимый.}$$
3. Существуют подмножества $\Xi_S, \Xi_F \subset \Xi$ такие, что множество допустимых последовательностей $j_0 \to \cdots \to j_{n-1}$, где $j_0 \in \Xi_S$, $j_{n-1} \in \Xi_F$, биективно отображается на сферу $S(n) \subset G$ отображением $(j_0 \to \cdots \to j_{n-1}) \mapsto \omega(j_{n-1})\gamma(j_{n-2}) \cdots \gamma(j_0)$.

Для произвольной фуксовой группы построенное ранее Р. Боуэном и К. Сириес [1], [4] кодирование не удовлетворяет этим условиям. Недавно М. Вротен [8] предложил новый подход, основанный на одновременном рассмотрении множества *всех* кратчайших путей, представляющих данный элемент g, которое, очевидно, симметрично. Ключевой шаг в доказательстве теоремы 1 состоит в задании семейства кратчайших путей неприводимой марковской цепью с тривиальной симметрической σ-алгеброй и удовлетворяющей условию симметричности.

Список литературы

[**1**] R. Bowen, C. Series, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50** (1979), 153–170. [**2**] А. И. Буфетов, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:4 (2000), 1–17. [**3**] A. I. Bufetov, *Ann. of Math.* (2), **155**:3 (2002), 929–944. [**4**] A. I. Bufetov, C. Series, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **151**:1 (2011), 145–159. [**5**] K. Fujiwara, A. Nevo, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18**:4 (1998), 843–858. [**6**] Р. И. Григорчук, *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы*, Сборник статей, Труды МИАН, **231**, Наука, МАИК "Наука/Интерпериодика", М., 2000, 119–133. [**7**] G.-C. Rota, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 95–102. [**8**] M. Wroten, *The eventual Gaussian distribution of self-intersection numbers on closed surfaces*, Thesis (Ph.D.), State Univ. of New York, Stony Brook, 2013, 41 pp.; 2014, 43 pp., arXiv: 1405.7951.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)
Aix-Marseille Université, École Centrale de Marseille, CNRS, Institut de Matématiques de Marseille, Marseille, France;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bufetov@mi-ras.ru

А. В. Клименко (A. V. Klimenko)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
E-mail: klimenko@mi-ras.ru

К. Сириес (C. Series)
University of Warwick, Coventry, UK
E-mail: c.m.series@warwick.ac.uk

Представлено Ю. С. Ильяшенко
Принято редколлегией
03.02.2023