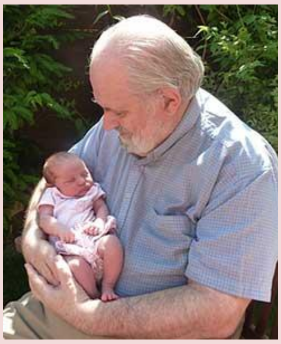

دیوید تال
تیرماه 97
(نوشته شده برای ویکی‌نوشت)

مسیر طولانی ملموس شدن حساب و جبر[1] و [2]

در این مقاله کوشیده‌ام با تمرکز بر نحوه‌ی توسعه ی تفکر ریاضی در بلندمدت، باورهای رایج در مورد یاددهی و یادگیری ریاضی را به چالش بکشم. هدف من این است که با توجه به نحوه‌ی درک ما از ریاضیات، رویکردی ساده برای یاددهی و یادگیری آن ارائه دهم. به طور خاص توجه من بر دریافت‌های حسی، دستکاری‌های ذهنی و تلاش برای ارتباط با دیگران است.

به دلیل تغییر معنایی ریاضیات و پیچیده شدن آن در طول مسیر، ناچاریم بر ایده‌های «حمایتی» تمرکز کنیم — ایده‌هایی که در شرایط جدید هم به درستی کار می‌کنند. در نقطه‌ی مقابل، ایده‌های «مشکل‌ساز» قرار دارند که در شرایط جدید، کارکرد قبلی خود را ندارند. به طور خاص، بهتر است به ایده‌های حمایتی‌ای توجه کنیم که کارایی خود را در گستره‌ی زمان طولانی‌تری حفظ می‌کنند. چنین ایده‌هایی می‌توانند مبنای تفکر ما شوند و ایده‌هایی که مشکل‌ساز می‌شوند، به جای اینکه جایی در ذهن پنهان بمانند، می‌توانند به صراحت مورد بررسی قرار گیرند.

کودک در حساب یاد می‌گیرد که بشمارد و به تدریج این ایده‌ی حمایتی را توسعه دهد که در شمارشِ مجموعه‌ای از اشیاء، تعداد اشیاء ثابت می‌ماند. آنچه در طولانی مدت اهمیت دارد محدود به کارایی این ایده در شمارش نیست، بلکه در وجود این خاصیتِ حمایتی، در عمل جمعِ ساختارهای عددی پیچیده‌تر است، در کسرها، در اعداد علامت‌دار، در اعداد حقیقی وحتی در اعداد مختلط. این خاصیت را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

> **اصل جمع:** در جمعِ مجموعه‌ای از اعداد، ترتیب اعداد در جمع کردن اهمیتی ندارد، نتیجه نهایی همواره یکسان است.

به طور مثال، حاصل جمع

$$2+\frac{3}{4}+1/35+(-17)$$

مستقل از ترتیب عوامل جمع است.

در گفتار، عبارات در زمان جاری می‌شوند در نتیجه وقتی شنیده می‌شوند توالی منحصر به فردی دارند. در همین حال، متن نوشته شده در یک توالی قاعده‌مند خوانده می‌شود که در جوامع غربی از چپ به راست است. اگر جمع و تفریق در یک توالی انجام شوند، ترتیب در آن اهمیتی نخواهد داشت. از نقطه نظر یک متخصص، تفریق همان جمع با قرینه‌ی عدد است. اصل جمع در سطح پیشرفته‌ای، این ایده ساده را برای یک بچه توسعه می‌دهد که حاصل یک دنباله از جمع‌ها و تفریق‌ها مستقل از ترتیب اعمال است.

---

[1] تال، دیوید (تیر 1397)، مسیر طولانی ملموس شدن حساب و جبر ، ویکی‌نوشت شماره 5.

[2] تقدیم به نوه‌ی دوازده ساله‌ام، سایمون تال

قانون مشابهی را در ضرب نیز داریم:

> **اصل ضرب:** در ضرب مجموعه‌ای از اعداد، ترتیب اعداد در ضرب کردن اهمیتی ندارد، نتیجه نهایی همواره یکسان است.

هر دو اصل جمع و ضرب، در طول دوران مدرسه به درستی کار می‌کنند، اما در ساختارهای پیچیده‌تر مثل ضرب ماتریس‌ها یا چهارگان‌ها درست نیستند. از طرفی دیگر، وقتی عملگرهای مختلف مانند جمع یا ضرب، به توان رساندن، ریشه‌گیری، تشکیل عبارت جبری و چیزهای دیگر وجود داشته باشند، شرایط پیچیده‌تر است و تحلیل دقیق‌تری را می طلبد. با یک مثال ساده آغاز می‌کنیم:

حاصل $2 \times 2 + 2$ چیست؟

اگر این عبارت را از چپ به راست بخوانیم و توالی اعمال را به همان ترتیبی که آمده در نظر بگیریم، از $2+2$ شروع می‌کنیم؛ حاصل 4 می‌شود و سپس 2×4 را حساب می‌کنیم و 8 را به دست می‌آوریم؛ اما با در نظر گرفتن این قرارداد در ریاضیات که ضرب نسبت به جمع تقدم دارد، ما ابتدا 2×2 را حساب می‌کنیم و سپس $2+2\times 2=2+4$ که جواب «درست» (6) را به دست می‌دهد. قانون تقدم مشکل‌ساز است؛ چرا که از ترتیب طبیعی خواندن و حرف زدن پیروی نمی‌کند و سختی‌هایی را موجب می‌شود. در ادامه، با وجود عملگرهای دیگر، قانون تقدم به قانون پیچیده‌تری تبدیل می‌شود. در این قانون، تقدم به ترتیب با پرانتز، توان و ریشه، ضرب و تقسیم، و جمع و تفریق است. بعضی از افراد این قوانین را با تکرار یاد می‌گیرند و آنها را درست و بدون تفکر استفاده می‌کنند[3]؛ اما اکثر افراد هنگام مواجه با ریاضیات پیچیده‌تر و سخت‌تر ، در استفاده از این قوانین دچار مشکل می‌شوند.
«ریاضیات جدید» در دهه‌ی 1960 تلاش کرد تا با تبیین قوانین حساب مانند «جابه‌جایی»، «شرکت‌پذیری» و «توزیع‌پذیری» که در عملگرهای دوتایی مثل جمع و ضرب وجود دارد، درستی این قواعد را توجیه کند. بعدها، با معرفی مفاهیم جدید مثل ارزش مکانی، کسرها، اعداد علامت‌دار، اعشاری-ها، بسط‌های اعشاری (اعداد حقیقی با نمایش روی محور اعداد) و اعداد مختلط (به عنوان نقاط صفحه)، این قواعد به عبارت‌های کلی‌تری در حساب و جبر «تعمیم» داده شدند. هم‌زمان، آموزش ریاضی مشکل دانش آموزان را «بدفهمی» تعبیر کرد و به صنعت اصلاح آنها تبدیل شد. من راه دیگری برای نگاه به مشکلات پیشهاد می‌کنم.

ملموس شدن حساب به کمک خواندن عبارت‌های نمادین

می‌توان رویه‌ها را با توجه به نحوه‌ی *بیان* آنها توسط ما و نحوه *شنیدن* آنها توسط دیگران، درک کرد. به طور مثال (حداقل) با دو روش می توانیم عبارت «$2\times 2+2$» را با رعایت مکث‌های کوتاه بین کلمات بخوانیم. برای اینکه نشان بدهم عبارت‌ها چگونه خوانده می‌شوند از دو تا نقطه (..)، بین علامت‌ها استفاده می‌کنم. عبارت «$2\times ..2+2$» را می-خوانم «دو به علاوه دو (مکث) ضرب در 2». با این تعبیر، ما حاصل $2+2$، یعنی 4 را در 2 ضرب می‌کنیم و حاصل نهایی 2×4 یعنی 8 است. به این ترتیب، $2\times 2+..2$ (یا $2\times 2..+2$)، یعنی $2+4$ که حاصل آن 6 است.

[3] برای آگاهی از ترفندهایی که در زبان انگلیسی برای به یادسپاری این قواعد استفاده می‌شود، به متن انگلیسی ویکی‌نوشت رجوع کنید.

دو عبارت «$2 + 2 .. \times 2$» و «$2 \times 2 + ..2$» را برای خودت (و برای یکی دیگر) با صدای بلند بخوان تا ببینی که دو شیوه متفاوت در بیان آنها، دو معنی کاملاً متفاوت را به خودت و دیگری منتقل می‌کند. *این کار را قبل از اینکه ادامه این مقاله را بخوانی انجام بده.*

این تفاوت، اصلِ کلی‌تری را به ما نشان می‌دهد که نه تنها در حساب که در جبر هم از آن استفاده می‌شود: می‌توان با تغییر در نحوه‌ی گفتن و شنیدن یک عبارت، معانی متفاوتی از آن عبارت استنتاج کرد.

اصل بخش‌بندی کلامی: می‌توان به یک دنباله از عملگرها با شیوه‌ی *بخش‌بندی کلامی* آنها معنی بخشید.

این اصل، کاربردهای گسترده‌ای در ریاضیات دارد. من زمانی متوجه قدرت این اصل شدم که نوه‌ی من که در آن زمان 11 ساله بود، با زیرکی از من پرسید: «ریشه‌ی دوم 9 ضرب در 9 چی می‌شه؟» او این سوال را خیلی هموار و بدون هیچ گونه تأکید و بخش‌بندی کلامی پرسید. چون می‌دانستم که او با مربع اعداد منفی آشنایی دارد پاسخ دادم جوابش می‌تواند 9+ یا 9− باشد. او پاسخ داد «نه! جوابش 27 است!» من توقع این پاسخ را نداشتم و او توضیح داد که منظورش «ریشه دوم عدد 9 .. ضربدر 9» بود. با این بخش‌بندی کلامی، ما ریشه دوم 9 را (که 3 می‌شود)، در 9 ضرب می‌کنیم و حاصل نهایی 27 می‌شود.

خیلی غافلگیرانه، نوه‌ام دریچه‌ی جدیدی را برای درک کردن عملگرها در حساب و جبر گشود. او راه جدیدی برای درک کردن معنی‌دار به من آموخت، اینکه به جای یادگرفتن قواعد تقدم دل بخواهی، می‌توان روی نحوه‌ی *صحبت* کردن درباره‌ی عبارت‌های ریاضی و بیان کردن ایده‌ها به گونه‌ای که دیگران قابل به *شنیدن* آن باشند، تمرکز کرد.
آنچه در مورد جمع و ضرب برقرار است در مورد عملگرهای دیگر مشکل‌ساز می‌شود. مثلاً، تفریق می‌تواند با بخش‌بندی‌های متفاوت، معانی متفاوت بدهد. اگر تفریق $1 - 3 - 5$ را به شکل $1 - 3 .. - 5$ بخوانیم، تعبیر آن $2 - 5$ و جواب 3 خواهد بود. اگر آن را به شکل $5 - (3 - 2)$ بنویسیم، حاصل $1 - 5$ و برابر 4 است. اگر آن را به شکل $1 - .. 3 - 5$ بگوییم، $1 - 2$ را خواهیم داشت با جواب 1.

کاربردهای عمومی اصل بخش‌بندی کلامی
هفته‌ها و ماه‌ها بعد از بینشی که نوه‌ام به من داد، فهمیدم که این اصل به صورت گسترده‌ای در ریاضی و در ترکیب عملگرهای مختلف ظاهر می‌شود. به طور مثال، وقتی به همراه مک گاون (تال و مک گاون، 2013) مشکلات دانش‌آموزان را در کار با عبارت‌های درجه‌ی دوم مطالعه می‌کردیم متوجه شدیم حساب کردن یک عبارت به ازای یک مقدار منفی (مثلاً محاسبه‌ی x^2 به ازای $x = -2$) می‌تواند دو تعبیر مختلف داشته باشد. بعضی از دانش‌آموزان آن را "مربع منفی 2" می‌خواندند و بعضی دیگر "منهای مربع 2". به طور کلی عبارت $-x^2$ را می‌توان به یکی از دو صورت زیر تعبیر کرد:

«منهای .. مربع x»، $-(x^2)$،

یا «مربع... منهای x»، $(-x)^2$،

این روش، راه جدیدی را برای تفسیر داده‌ها به ما ارائه می‌دهد. به جای تعبیر مشکل دانش‌آموزان به عنوان بدفهمی در استفاده از قرارداد استفاده از پرانتزها، می‌توان آنها را همچون روش‌های متفاوت بیان کردن و شنیدن نمادها در نظر گرفت.

البته قراردادهایی وجود دارند که باید برای کوتاه کردن طول عبارت‌ها معرفی شوند. مثلاً دو برابر x را می‌نویسیم $2x$ (به شرطی که اشتباهی به وجود نیاید علامت ضرب را حذف می‌کنیم). اگر چه باید حواسمان به استفاده‌های دیگر $2x$ باشد، جایی که 2 *ضرب در* x نیست، مثلا $2\frac{1}{2}$ یعنی 2 *به علاوه* $\frac{1}{2}$ و 21 یعنی 2 *ضربدر* 10 *بعلاوه* 1. با وجود این، اصل‌های جمع و ضرب این امکان را برای ما فراهم می‌کنند که خواندن عبارات در حساب و جبر ساده‌تر شود.

اتصال

خواندن عبارت‌های پیچیده‌تری مثل $2x^2+7x+5+3x^2-3x$ سطح دشوارتری دارد. با در نظر گرفتن اصل جمع، عبارت داده شده دنباله‌ای از جمع و تفریق‌هاست بدون اینکه ترتیب انجام آنها مهم باشد. بنابراین، عبارت می‌تواند به صورت $2x^2+7x+5+3x^2-3x$ بازنویسی شود. اگر x^2 را همچون یک شیء مجزا در نظر بگیریم، می‌توانیم دو تا از آن را ($2x^2$) با سه تا از آن ($3x^2$) جمع کنیم و پنج تا از آن را($5x^2$) به دست آوریم. به طور مشابه، هم میتوانیم از $4x$ $7x-3x$ را به دست آوریم. توجه کنید که در هنگام انجام این عمل‌ها، با جمله‌ای مانند$3x^2$ مواجه‌ایم که به شکل دنباله‌ی متوالی‌ای از نمادها نوشته نشده است و توان 2 در آن، نه در همان خط باقی نمادها، بلکه در بالا نوشته شده است. در مثال‌های پیچیده‌تری مانند

$$\sqrt[3]{\frac{4x^3-2}{x^2+1}}$$

علائم نه در دنباله‌ای خطی، بلکه در موقعیتی مکانی قرار گرفته‌اند. این مثال می‌تواند خطی نوشته و دنباله‌ای گفته شود، مثلاً «ریشه‌ی سوم ((چهار برابر مکعب x) به روی (مربع x بعلاوه 1)). پرانتزها نشان می‌دهند که نمادها چطور دسته‌بندی شده‌اند. این مثال راحت‌تر است که نوشته و خوانده شود به جای اینکه گفته و شنیده شود. در اینجا، حس بصری حاصل از این نمادها با حس نمادین آنها تلفیق می‌شود.
برای اینکه مجموعه این نمادها قابل خواندن باشد باید آنها را اسکن و تعبیر کرد. مثلاً در عبارت بالا، توان 3 در x^3 و توان2 در x^2 به آن متصل است و هر یک از آنها موجود یکپارچه‌ای هستند. صورت کسر، $4x^3-2$، اختلاف بین دو عبارت $4x^3$ و 2 است در حالی که مخرج کسر، x^2+1 حاصل جمع دو عبارت x^2 و 1 است.
درک کردن چنین عبارت‌هایی نیازمند پیچیدگی‌ای بسیار بیشتر از حفظ کردن طوطی‌وار قواعد ترتیب عملیات است. تغییرات دقیق و ظریفی در معنا باید اتفاق بیافتد تا روند درک مفهومی کودک که با تجربه‌ی شمارش و مرتب کردن آغاز می‌شود و تا تجربه او در برخورد با عبارت‌های پیچیده‌تر حساب و جبر هم ادامه دارد با موفقیت، کامل شود.
در ابتدای این مسیر، می‌توان روی اصل جمع و ضرب تمرکز کرد و از اصل بخش‌بندی کلامی ایده گرفت. سپس پرانتزها به طور معنی‌داری و برای اشاره به تغییرات ظریف معنایی در دنباله‌ای خطی از عناصر معرفی خواهند شد. در ادامه، قراردادهای کوتاه کردن عبارت‌ها و طرح‌های مکانی برای نمایش عبارت‌های پیچیده‌تر مورد استفاده قرار خواهد گرفت.
بعضی از قراردادها وضوح کمتری دارند. به طور مثال عبارت e^{x^2} معمولاً خوانده می‌شود: «e به توان x^2» و نه، «مربع e^x». (برای اینکه خودتان را متقاعد کنید در نظر بگیرید که عبارت e^{x^2+x} برای شما به چه معناست).

اگر x^n را به شکل x^n بنویسیم، e^{x^2} به شکل e^x^2 خواهد شد. با استفاده از پرانتزها می‌توان تفاوت بین دو عبارت $e^(x^2)$ و $(e^x)^2$ را دید. در $e^(x^2)$ ، «اتصال از راست» است و دو عبارت در راست به یکدیگر متصل شده‌اند و ترتیب عمل‌ها از راست. در $(e^x)^2$، «اتصال از چپ » است.
تفسیر قراردادی از 2^{3^4}، «اتصال از راست» است، یعنی $2^(3^4) = 2^81$.
اگر 2^{3^4}، به طور عادی از چپ به راست خوانده شود، جواب چیز دیگری است: $(2^3)^4 = 2^12$. این شرایط، با آنچه در جمع و ضرب تجربه می‌کنیم کاملاً متفاوت است. در جمع و ضرب، اتصال از چپ و راست نتیجه‌ی یکسانی دارد: $(2+3)+4$ همان $2+(3+4)$ است و $(2\times 3)\times 4$ نیز همان $2\times(3\times 4)$.

جمع‌بندی

این بحث‌ها چه چیزی را در مسیر طولانی ملموس شدن حساب و جبر به ما می‌گوید؟ ما هم اکنون می‌دانیم که توجه به بخش‌بندی کلامی عبارت‌های جمعی و ضربی می‌تواند در ابتدا به کار آید. به تدریج، **اصل‌های جمع و ضرب** به ما می‌آموزند که با هر ترتیبی که جمع یا ضرب مجوعه‌ای از اعداد انجام شود، نتیجه نهایی یکسان است. این قوانین در طول دوران ریاضی مدرسه پایدار و حمایتی باقی می‌مانند، مستقل از نوع اعداد مورد استفاده: حسابی، کسری، علامت‌دار، اعشاری، حقیقی یا مختلط. از طرفی دیگر، در عملگرهای دیگر، بخش‌بندی‌های کلامی متفاوت نیازمند استفاده از پرانتزها در نوشتن است؛ چرا که بنابر **اصل بخش‌بندی کلامی،** بیان‌های متفاوت، معانی متفاوت و نتایج متفاوتی را به همراه خواهند داشت. به این ترتیب می‌توان به جای اصرار بر یاد دادن طوطی‌وار قراردادهایی که حتی با توالی طبیعی گفتار همخوانی ندارند، به طور صریح بر جنبه‌های مسأله‌دار عمل‌ها و ترکیب عمل‌ها تمرکز کرد و نشان داد که چگونه می‌توان تفاوت مفهومی حاصل از بیان‌های متفاوت را با استفاده‌ی درست از پرانتزها نوشت. با چنین تجربه‌ی انسانی‌ای، شاید بتوان در درازمدت، مسیر معنادارتری را برای یادگیری گروه بیشتری از افراد فراهم کرد.

تا جایی که من می‌دانم، این رویکرد تاکنون در مرکز توجه یک پروژه‌ی تحقیقی نبوده است. شما، خواننده عزیز، آنچه را که من پیشنهاد کرده‌ام، در سایه تجربیات خودت تفسیر خواهی کرد. همچنان که من هم آنها را با توجه به تجربیات خودم درک می‌کنم، تجارب یک ریاضیدان محض، یک شرکت‌کننده در دوره‌های آموزش معلمی، یک پدر و یک پدربزرگ که شاهد رشد درازمدت کودکان و نوه‌هایش بوده است. الان این فرصت وجود دارد تا هر کدام از ما، پا را از تجارب شخصی خود، تجاربی که مبتنی بر محیط آشنای پیرامونمان است، فراتر بگذاریم و در دنیایی که مدام در حال تغییر است، در جستوجوی تصویر بزرگتری از معنای یادگیری تفکر ریاضی باشیم.

در این نوشته‌ی کوتاه تمرکز من روی تلفیق ضروری نمادگذاری خطی و مجسم‌سازی تصویری، برای ملسموس شدن حساب و جبر در درازمدت بود. برای مطالعه بیشتر می‌توانید به کتاب «چگونه انسان‌ها یاد می‌گیرند ریاضی-وار فکر کنند» (تال، 2013) رجوع کنید. این کتاب در برگیرنده‌ی همه‌ی آن چیزی است که من تا آن زمان در مورد چارچوب یادگیری بلندمدت در ریاضی فهمیدم بودم. داستان شروع توجه و علاقه‌ی من به بخش‌بندی کلامی را در تال، تال و تال (2017) و بالاخره، آخرین تفسیرم را از یادگیری دراز مدت حساب و جبر، در مقاله‌ای که برای معلمین دبستان ژاپن نوشته‌ام (تال، 2018)، بخوانید.

مراجع

Mercedes McGowen & David Tall (2013). Flexible Thinking and Met-befores: Impact on learning mathematics, with particular reference to the minus sign. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 527–537.
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2013b-mcgowen&tall-minus-sign.pdf

David Tall (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. New York: Cambridge University Press.

David Tall (2018). Making sense of elementary arithmetic and algebra for long-term success, *Draft chapter for Japanese Elementary School Teachers*.
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2018a%20long-term-sense-making.pdf

David Tall, Nic Tall, Simon Tall (2017). Problem posing in the long term conceptual development of a gifted child. *Festschrift to celebrate the 75th birthday of Andràs Ambrus*. WTM-Verlag.
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2017a-long-term-problem-posing.pdf

مترجمان:

یاسمن بقایی؛ معلم متوسطه اول مجموعه سلام

امیر حسین اصغری؛ دانشگاه لیورپول جان مورس

ویرایش متن، آماده و خوشگل سازی فایل پی-دی-اف

شراره تقی دستجردی؛ خانه ی ریاضیات اصفهان