Conflitos Teórico-Computacionais e a Formação da Imagem Conceitual de Derivada

Victor Giraldo*
Universidade Federal do Rio de Janeiro
University of Warwick

Luiz Mariano Carvalho†
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

David Tall‡
University of Warwick

24 de Setembro de 2002

1 Introdução

Diferentes questões relativas uso de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de Matemática têm sido discutidas em trabalhos recentes (ver por exemplo, Abrahão [1]; Belfort & Guimarães [3]; Giraldo [6]; Giraldo & Carvalho [8, 9, 10]; Laudares & Lachini [12]; Hunter, Monaghan & Roper [11]; Monaghan, Sun & Tall [15]). Alguns destes relatam experiências em que as limitações intrínsecas das representações computacionais para conceitos matemáticos levaram à formação de imagens conceituais restritas.

Aprofundando a discussão iniciada em Giraldo & Carvalho [8], discutiremos neste texto a possibilidade de *reversão* do papel pedagógico de tais limitações, especialmente daquelas relacionadas à natureza finita dos algoritmos empregados nos programas atualmente disponíveis para uso em sala de aula. Argumentaremos que esta reversão pode ser propiciada a partir do confronto de formas de representação computacionais e não computacionais e, particularmente, da evidência das aparentes contradições associadas.

Na seção 2, revemos brevemente as noções de *imagem conceitual* e *unidade cognitiva*, estabelecidas em Tall & Vinner [20]; Vinner [23] e Barnard & Tall [2]. Em 3, relembramos alguns resultados de pesquisa que apontam para efeitos negativos do uso de computadores no ensino. Em 4, baseados na noção de *conflito teórico-computacional*, apresentada em Giraldo [6] e Giraldo & Carvalho [7], expomos nossa proposta de potencialização das limitações das representações computacionais como fator de enriquecimento das imagens conceituais desenvolvidas por estudantes. Apresentamos em 5 nossa interpretação para parte dos resultados empíricos desta pesquisa. Finalmente, em 6 discutimos algumas perspectivas de pesquisa sugeridas por nosso trabalho.

*victor@im.ufrj.br
†luizmc@ime.uerj.br
‡david.tall@warwick.ac.uk

2 Imagens conceituais e unidades cognitivas

De acordo com David Tall e Shlomo Vinner, *imagem conceitual* é a estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo (ver Tall & Vinner [20], Vinner [23]), constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, descrições verbais e impressões associadas a um dado conceito. Uma imagem conceitual se desenvolve continuamente ao longo dos anos, por meio de todo tipo de experiências relacionadas ao conceito em questão, podendo mudar a medida em que o sujeito se depara com novos estímulos. Uma imagem conceitual pode ainda estar associada a uma sentença usada para especificar o conceito em questão, denominada *definição conceitual* pelos autores, que, por sua vez, pode ou não ser coerente com a definição matemática correta, isto é, aquela aceita pela comunidade matemática de forma geral. Desta forma, uma imagem conceitual pode ou não estar associada a conceituação matemática formal, como destacam Barnard & Tall [2], Vinner [23], [22] e Tall [18].

Tall & Tony Barnard [2] denominam *unidade cognitiva* cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, na qual um indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. Assim, unidades cognitivas podem ser símbolos, fatos específicos ou genéricos relacionados ao conceito em questão, passos de um argumento, teoremas, e assim por diante. De acordo com Thurston [21], as estratégias empregadas para desenvolver idéias matemáticas freqüentemente exigem esquemas de compressão mental, em que o sujeito deve recorrer rápida e completamente a idéias que constituirão posteriormente partes de outras mais complexas. Desta forma, Tall e Barnard afirmam que são fundamentais para o pensamento matemático as habilidades de conceber e manipular unidades cognitivas, de maneira que informações relevantes tanto possam ser trazidas ao foco da atenção quanto guardadas em pano de fundo, conforme o necessário. A teoria proposta pelos autores sugere portanto que uma imagem conceitual rica provém da construção de uma ampla gama de correlações e conexões entre unidades cognitivas.

3 Efeitos negativos do uso de computadores no ensino de matemática: estreitamento de imagens conceituais

Neste investigação, tencionamos enfocar o uso positivo de tecnologia para a aprendizagem de Matemática. No entanto, é importante assinalar que diversos resultados de pesquisas recentes indicam que o uso inadequado de ambientes computacionais pode ter efeitos negativos (ou ao menos inócuos). A teoria citada na seção anterior sugere, em particular, que a abordagem do conceito de derivada deve incluir diferentes representações, de forma a propiciar a formação de ligações múltiplas e flexíveis entre unidades cognitivas. Cada representação põe em evidência certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo oculta outros. Tall [18] afirma que a evidência em determinados aspectos e negligência de outros pode levar a atrofia dos aspectos negligenciados.

Por exemplo, Hunter, Monaghan & Roper [11] observaram que estudantes usando o programa *Derive* não precisavam substituir valores para obter uma tabela e esboçar o gráfico. Em conseqüência, aqueles estudantes não desenvolveram a capacidade de cálculo por substituição. De fato, mesmo estudantes que empregavam substituição de valores antes do curso, aparentemente perderam esta habilidade depois.

No Brasil, Abrahão [1] observou a reação de professores do ensino médio lidando com gráficos de funções produzidos por computadores e calculadoras gráficas. Durante o experimento, os professores hesitaram em considerar o fato de que computadores podem fornecer resultados "errados" ou "incompletos", em virtude de limitações dos programas ou inadequação das janelas de visualização. Esses resultados foram muitas vezes aceitos pelos participantes sem questionamento, mesmo quando claramente contrários aos seu conhecimento prévio do tópico.

Laudares & Lachini [12] observaram a implantação de um laboratório para o ensino de cálculo em uma grande universidade brasileira, que vinha adotando uma abordagem tradicional até então. As entrevistas com os professores de cálculo revelaram que a maioria deles acreditava que as atividades de laboratório seriam uma perda de tempo, que deveria ser empregado em sala de aula convencional, e que o uso do computador deveria se restringir a cálculos muito pesados. Os autores relatam que as atividades de laboratório eram restritas a tarefas mecânicas, sem ligação com a teoria estudada em sala de aula. Em conseqüência, os estudantes não demonstravam qualquer entendimento dos conteúdos e objetivos daquelas atividades. Laudares e Lachini concluem que o uso de tecnologia pode se constituir numa importante alternativa para o ensino em moldes tradicionais, porém é fundamental propiciar o desenvolvimento de uma perspectiva crítica por parte dos estudantes.

4 Usando conflitos teórico-computacionais para o enriquecimento de imagens conceituais

Muitos autores concordam que os efeitos de computadores na aprendizagem de Matemática não depende de qualquer característica intrínseca dos equipamentos utilizados. Tais efeitos são conseqüência da forma como a máquina é empregada (ver por exemplo, Tall [19]; Belfort & Guimarães [3]).

O experimento relatado por Hunter, Monaghan and Roper, em particular, revela um processo de *estreitamento* de imagens conceituais: *as características intrínsecas da representação computacional leva a limitações nas imagens conceituais desenvolvidas pelos estudantes.*

De forma geral, muitas limitações das representações computacionais para conceitos matemáticos são decorrentes da estrutura finita dos algoritmos empregados. Por exemplo, na figura 1, vemos o gráfico da função polinomial $p(x) = (x-1)\,(x-1,1)$, traçado pelo programa *Maple* para $-2 \leq x \leq 4$ e $-0,01 \leq y \leq 0,01$. Devido a um erro de interpolação, o gráfico gerado não intercepta o eixo das abscissas, sugerindo que a função não admitiria raízes reais no intervalo.

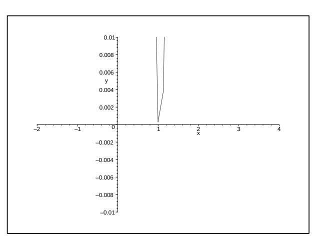


Figura 1: Um conflito teórico-computacional observado no gráfico do polinômio $p(x) = (x-1)\,(x-1,1)$ gerado pelo *Maple*.

Para estudar mais detalhadamente situações como a descrita acima, em Giraldo [6], utilizamos o termo **conflito teórico-computacional** para nos referimos a *qualquer situação na qual uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada* (ver também Giraldo & Carvalho [7]).

Encontramos outro exemplo em Mills, Tall & Wardle [14], onde é relatado um experimento computacional com a resolução da equação quádrica

$$x^4 + 2.88\,x^3 - 19.23\,x^2 - 36.11\,x + 91.56 = 0$$

que possui duas raízes reais muito próximas. Devido a erros de arredondamento, uma série de resultados inesperados foram gerados, dentre os quais um gráfico mostrando um grande número de raízes reais para a quádrica.

Outro exemplo importante de conflito teórico-computacional é mostrado na figura 2., onde vemos o processo de magnificação local da curva $y = x^2$, em torno do ponto $x_0 = 1$, efetuado pelo *Maple*. Sendo a curva diferenciável, seria esperado que esta se assemelhasse a uma reta quando altamente magnificada. Entretanto, mais uma vez devido a erros de aritmética de ponto flutuante ou limitações dos algoritmos empregados, para valores muito pequenos dos comprimentos dos intervalos da janelas gráficas utilizadas (de ordens iguais ou inferiores a 10^{-6}) a curva adquire o aspecto de uma poligonal.

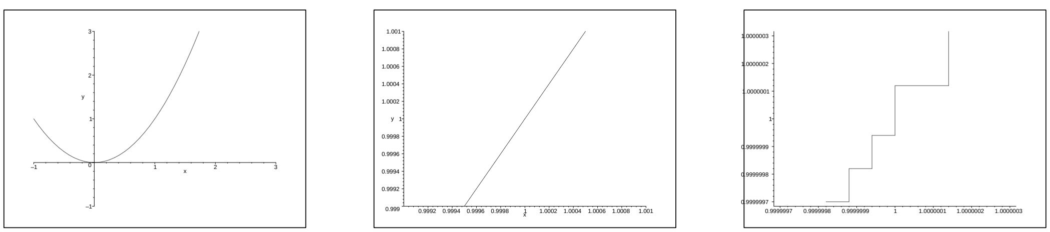


Figura 2: Um conflito teórico-computacional observado no processo de magnificação local.

Em nossa própria interpretação, o processo de estreitamento observado por Hunter, Monaghan and Roper não foi devido à ocorrência de conflitos teórico-computacionais, mas, ao contrário, à sua ausência. O uso inadequado de ambientes computacionais – especialmente se não confrontados com outras formas de representação – pode contribuir para a cristalização da concepção de que as limitações da representação são na verdade características do próprio objeto considerado, levando à formação de imagens conceituais restritas. De fato, Sierpinska [17] assinala que a consciência das limitações de cada forma de representação e do fato de que elas representam um mesmo conceito é uma condição fundamental para a compreensão de funções.

Nossa hipótese é de que, se conflitos teórico-computacionais são enfatizados, em lugar de evitados, o papel pedagógico das características inerentes a cada forma de representação podem sofrer uma **reversão** positiva: elas podem contribuir não para o estreitamento, mas para o enriquecimento de imagens conceituais.

5 Alguns resultados empíricos

Para investigar esta hipótese, observamos uma amostra de seis estudantes em primeiro ano de graduação na UFRJ, em doze entrevistas individuais nas quais lidavam com situações de conflito teórico-computacional. Passaremos a nos referir aos participantes do experimento pelos nomes fictícios: Antônio, Carlos, Francisco, Júlio, Marcelo and Paulo.

Apresentaremos resumidamente nesta seção os resultados da primeira entrevista individual. Foram dadas aos participantes duas representações para a função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$: a expressão algébrica e o gráfico gerado pelo *Maple* para $(x, y) \in [-100, 100]^2$ (figura 3). Devido à escolha da janela gráfica, a curva tinha o aspecto de duas semi-retas partindo da origem (de fato, suas assíntotas inclinadas). Assim, o gráfico mostrado na tela do computador apresentava o aspecto da função módulo. Esta representação computacional se encontrava portanto em conflito com a algébrica. Em particular, o gráfico esboçado pelo programa sugeria que a curva não seria diferenciável em $x = 0$. Demos início à entrevista perguntando:

> *Você está vendo na tela o gráfico da função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, esboçado para $-100 \leq x \leq 100$ e $-100 \leq y \leq 100$. Esta função tem derivada?*

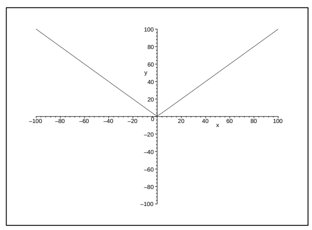


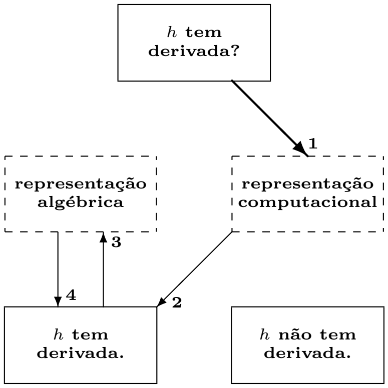
Figura 3: O gráfico de $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, para $(x, y) \in [-100, 100]^2$.

Para responder a questão inicial, os estudantes tinha liberdade para manipular a vontade o programa. Resumiremos a estratégia de cada estudante com a ajuda de um diagrama (figura 4). As retângulos contínuos representam a pergunta inicial – *h tem derivada?* – e suas duas possíveis respostas – *h tem derivada* or *h não tem derivada.* Os retângulos tracejados representam as duas representações dadas para f – computational e algébrica. As setas indicam as ações dos entrevistados e se encontra enumeradas em ordem cronológica. A seta em negrito indica a *ação decisiva* do entrevistado, isto é, aquela que conduziu à conclusão final.

Analisaremos mais detalhadamente a estratégia de Francisco, que consideramos bastante representativa. Reproduzimos a seguir alguns trechos de sua entrevista.

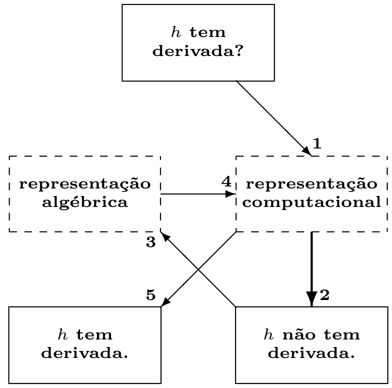
> *Por exemplo [...] se você fizesse $\sqrt{x^2}$, seria $|x|$, teria o bico. Você botou $+1$ aí. Esse $+1$ veio pra complicar. Você não consegue tirar ela da raiz completamente, concorda? [...] Visualmente, no visual, ali não é o bico, então, teria derivada. Estou falando em termos visuais. Agora vamos falar algebricamente. Realmente, algebricamente, você derivando, vai conseguir derivar. [...] Tem como você dar um zoom aqui?* [efetua o *zoom*]
>
> *É, parece uma parábola. Dando um zoom aí, você percebe nitidamente como é que ela é derivável.*

Após concluir que h era de fato diferenciável, Francisco espontaneamente continua a estudar a função. Ele observa:



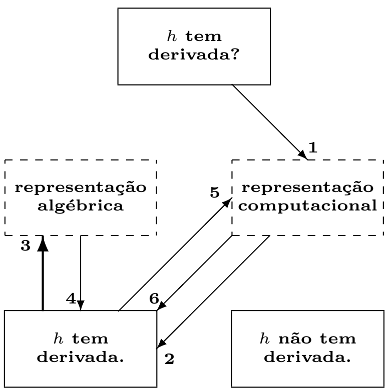
estratégia de Antônio:

1 examina o gráfico na tela;
2 conclui que h é diferenciável;
3 calcula a derivada;
4 certifica-se de que f é diferenciável.



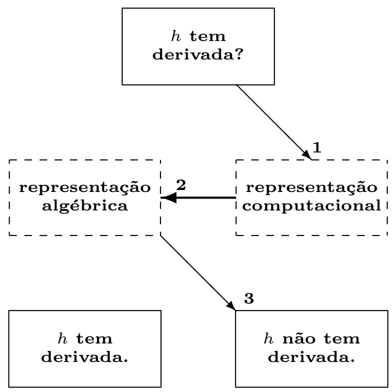
estratégia de Carlos:

1 examina o gráfico na tela;
2 supõe que h não é diferenciável;
3 tenta calcular os limites laterais;
4 magnifica a janela gráfica;
5 conclui que h é diferenciável.



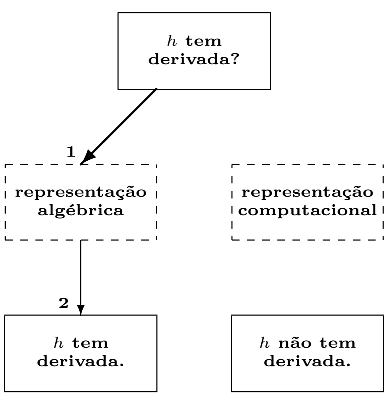
estratégia de Francisco:

1 examina o gráfico na tela;
2 supões que h é diferenciável;
3 calcula a derivada;
4 conclui que h é diferenciável;
5 efetua um *zoom* na janela gráfica;
6 certifica-se de que f é diferenciável.



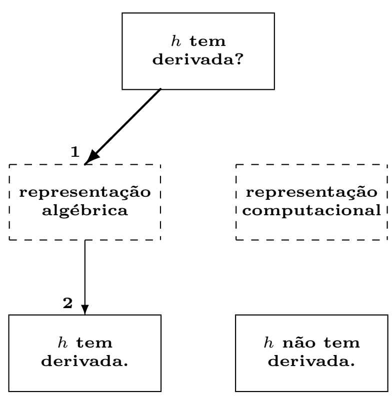
estratégia de Júlio:

1 examina o gráfico na tela;
2 examina a expressão algébrica;
3 conclui que h não é diferenciável.



estratégia de Marcelo:

1 examina a expressão algébrica;
2 conclui que h é diferenciável.



estratégia de Paulo:

1 examina a expressão algébrica;
2 conclui que h é diferenciável.

Figura 4: Estratégias dos participantes no estudo da diferenciabilidade de h.

> *Agora tá aí, uma boa questão.* [...] *Isso aqui tende a ser uma reta, mas não é uma reta?* [...] *Aí, agora, me pegou! Eu sei que é derivável! Deixa eu ver.* [...] *Aí, eu vou ter que derivar ela para pensar se é uma reta ou não.* [calcula a derivada]
>
> *Olha! Essa função é derivável, mas vai ter uma inclinação diferente para cada ponto. Não é como a função módulo que não é derivável no ponto* $(0, 0)$*, mas tem a mesma derivada do lado* x *positivo e mesma derivada do lado* x *negativo para todos os pontos. Essa função não, ela vai se aproximar no* $+\infty$ *e* $-\infty$ *da função* $|x|$*. Vai se aproximar, mas para cada ponto vai ter uma derivada diferente.*

Como podemos constatar a partir dos extratos acima, Francisco apresenta conexões flexíveis entre a representação computacional durante a entrevista. Sua conclusão sobre a diferenciabilidade de h está baseada na representação algébrica; ele argumenta que a propriedade estaria garantida pelo fato das fórmulas de derivação poderem ser aplicadas. Além disso, ele faz uso da representação computacional, efetuando um *zoom* no gráfico, para formar para si próprio uma visão mais geral do comportamento da função.

O ponto que gostaríamos de assinalar, entretanto, é o fato de que Francisco espontaneamente vai mais adiante depois de estabelecer de forma conclusiva a resposta da questão inicialmente proposta. Ele formula outra pergunta para si próprio: *Isto tende a ser uma reta, ou é uma reta?* Para investigar esta nova questão, Francisco acessa uma nova unidade cognitiva: *Se a derivada não é constante, então a função primitiva não é uma reta.* A formulação da nova questão, que por sua vez conduziu à ativação de uma nova unidade cognitiva, foi motivada por um conflito teórico-computacional: o gráfico, da forma em era visto na tela, não era coerente com a expressão algébrica.

É importante ressaltar que outros participantes seguiram estratégias consideravelmente distintas. Paulo e Marcelo, por exemplo, não fizeram qualquer menção ao gráfico mostrado na tela durante a entrevista. Entretanto, segundo nossa interpretação, este comportamento semelhante está associado a atitudes mentais bastante diferentes[1]. Os resultados apresentados neste texto são parte integrante de uma investigação mais ampla em andamento, na qual os participantes lidaram com situações de conflitos de diferentes naturezas. Os resultados globais estão atualmente sendo analisados.

6 Considerações finais

Observa-se freqüentemente em ensino superior de matemática, um modelo de *abordagem puramente formal*, em que os conteúdos são apresentados com as mesmas ordenação e estrutura da formulação teórica. Diversos obstáculos pedagógicos estão associados a este modelo. Por exemplo, Bernard Cornu [4] ressalta que muitos termos empregados em definições matemáticas têm significados diferentes da linguagem corrente. Este é o caso dos próprios quantificadores lógicos, como “existe” e “para todo”, além de muitos dos conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal, como “limite” e “continuidade”. Uma vez que uma definição matemática é formulada, o conceito definido adquire o status de objeto em si próprio, independente da linguagem empregada. Assim, embora definições lancem mão da linguagem corrente, o manuseio lógico das mesmas (como em demonstrações de teoremas e demais desdobramentos teóricos) demanda a

[1] Uma versão mais completa deste artigo pode ser encontrada em: www.davidtall.com.

abstração da linguagem. Grande parte do embasamento necessário para o desenvolvimento de idéias matemáticas não provém das definições, mas das noções intuitivas associadas ao conceito (ver Cornu [4]; Tall & Vinner [20]). Vinner [23] ressalta que os processos pelos quais teorias matemáticas são formuladas dificilmente correspondem à sua organização formal. Pelo contrário freqüentemente a conceituação formal se revela profundamente contrária à intuição humana, como evidencia sua própria evolução histórica (ver Cornu [4]; Malik [13]; Sierpinska [16]). Desta forma, ao introduzir um dado conceito matemático, freqüentemente recorremos a formas de representação distintas da definição formal e limitadas em relação a esta. Este o caso das representações computacionais para o conceito de derivada, tratado neste trabalho.

Por outro lado, se em lugar do modelo puramente formal, adotamos um modelo de *abordagem com base em uma única forma de representação*, observam-se obstáculos pedagógicos de outra natureza. Como já observamos, é razoável esperar que, neste caso, as limitações intrínsecas da forma de representação utilizada se convertam em limitações nas imagem conceitual formadas pelos estudantes. De fato, este processo é evidenciado pelo resultados de pesquisa citados, dentre outros.

Lemos no clássico *What is Mathematics*:

> *Qualquer que seja o ponto de vista filosófico, para todos os propósitos da observação científica, um objeto se exaure na totalidade das possíveis relações com o instrumento ou sujeito que o percebe.*
>
> Courant & Robbins [5] p. xvii, tradução nossa

O que propomos com nosso trabalho é um modelo de abordagem alternativo em relação àqueles citados, isto é, um modelo baseado não puramente no formalismo nem puramente em representações imprecisas. Esta proposta não pressupõe a desvalorização do formal em relação ao impreciso, ou do impreciso em relação ao formal. Ao contrário, por meio da evidência de limitações e diferenças, objetivamos tanto a formação de imagens conceituais enriquecidas por uma ampla gama de unidades cognitivas, como a ênfase do fundamental papel da formalização na construção de uma teoria matemática, em relação a formas imprecisas de representação.

Referências

[1] Abrahão, A.M.C. (1998). *O Comportamento de Professores frente a Alguns Gráficos de Funcões $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Obtidos com Novas Tecnologias*. Dissertação de Mestrado, PUC/RJ.

[2] Barnard, A.D. & Tall, D. (1997). *Congnitive Units, Connections, and Mathematical Proof*. E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education, Lahti, Finland, 2:41-48.

[3] Belfort, E. & Guimarães, L.C. (1998). *Uma Experiência com Software Educativo na Formação Continuada de Professores de Matemática*. Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática, São Leopoldo, Brasil, II:376-379.

[4] Cornu, B. (1991). *Limits*. In D.O. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, 153-166, Dordrecht: Kluwer.

[5] Courant, R. & Herbert R. (1941). *What Is Mathematics?*. Oxford University Press, New York.

[6] Giraldo, V. (2001). *Magnificação local e conflitos teórico-computacionais*. Exame de qualificação, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

[7] Giraldo, V. & Carvalho, L.M. (2002). *Local Magnification and Theoretical-Computational Conflicts*. Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, England, vol.1, p.277.

[8] Giraldo, V. & Carvalho, L.M. (2002). *Funções e Novas Tecnologias*. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, No. 1, 111-119.

[9] Giraldo, V. & Carvalho, L.M. (2002). *Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino do Coneito de Derivada*. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, in press.

[10] Giraldo, V. & Carvalho L.M. (2000). *Funções e novas tecnologias: algumas perguntas*. Anais do III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro, Vol. 1, pp. 24-29, SBEM/RJ.

[11] Hunter, M., Monaghan, J.D. & Roper, T. (1993). *The Effect of Computer Algebra Use on Students' Algebraic Thinking*. In R. Sutherland (Ed.), Working Papers for ESCR Algebra Seminar, London University, Institute of Education, London, England.

[12] J.B. Laudares & J. Lachini (2000). *O Uso do Computador no Ensino de Matemática na Graduação*. 23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.

[13] Malik, M.A. (1980). *Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of a Function*. Journal of Mathematics Education in Scicences and Tecnology, 11(4):489-492.

[14] Mills, J., Tall, D.O. & Wardle, M. (1990). *A quartic with a thousand roots*. Mathematical Gazette, 74:339-346.

[15] Monaghan, J.D., Sun, S. & Tall, D. (1993). *Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System*. In J.P. da Ponte & J.F. Matos (Eds.), Proceedings of the International Conference of the International Group for Psycology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, 3:279-286.

[16] Sierpinska, A. (1996). *Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education*. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, 827-876.

[17] Sierpinska, A. (1992). *On Understanding the Notion of Function*. In Harel, G & Dubinsky, E. (Eds.), MAA Notes and Report Series, 25-58.

[18] Tall, D.O. (2000). *Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers*. Plenary Presentation for ATCM Conference, Chang Mai, Thailand.

[19] Tall, D.O. (2000). *Cognitive Development in Advanced Mathematics Using Technology*. Mathematics Education Research Journal, 12(3): 210-230.

[20] Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12:151-169.

[21] Thurston, W.P. (1990). *Mathematical Education*. Notices of the American Mathematical Society, 37(7):844-850.

[22] Vinner, S. (1983). *Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function*. The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14:293-305.

[23] Vinner, S. (1991). *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. In D.O. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, 65-81, Dordrecht: Kluwer.